

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 3

FSV UK, ZS 2024-25

vzor

1. Vyšetřete konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

(12 bodů)

2. Necht B je kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 10 & -6 & -5 \\ 2 & -6 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici $\mathbb{A}$ na diagonální tvar a určete, zda forma B je PD, ND, PSD, NSD či ID.

(12 bodů)

3. Napište Taylorův polynom pátého řádu funkce

$$f(x) = \cos(\sin(x) + \exp(x) - 1)$$

v bodě 0 a s jeho pomocí pak spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x) + \exp(x) - 1) - 1 + 2x^2 + x^3}{x^4}.$$

(13 bodů)

4. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v $\mathbb{R}^2$, kde

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}.$$

(13 bodů)

Výsledky a návody

1. Řada je konvergentní. Řada má pro $n \geq 3$ kladné členy a lze použít odmocninové kritérium.

2. Matice vyjde pozitivně definitní.

3. $T_5^{f,0}(x) = 1 - 2x^2 - x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{7}{12}x^5$; limita vyjde $\frac{13}{24}$

4. Body, kde je gradient f nulový: $[0, 0]$, $[1, 1]$, $[-1, 1]$, $[1, -1]$, $[-1, -1]$; body lokálního maxima: $[1, 1]$, $[-1, -1]$; body lokálního minima: $[-1, 1]$, $[1, -1]$.